

Государственное Бюджетное Общеобразовательное Учреждение
Средняя общеобразовательная школа № 510
с углубленным изучением английского языка
Московского района Санкт-Петербурга

Проектная работа
учащихся 7 «А» класса
на тему:
«Треугольник Паскаля»
(исследовательский проект)

Исполнители:

группа учащихся 7 «а» класса
Дроздова Елизавета, Ларионов Андрей,
Жамбалдоржиев Александр,
Семичасова Алина, Хромченко Даниил

Руководитель:

Тымко Евгения Сергеевна,
учитель математики
ГБОУ шк. № 510

г. Санкт-Петербург
2019

Оглавление

Введение.....	3
Теоретическая часть работы	5
Знакомство с треугольником Паскаля	5
Блез Паскаль – французский математик.....	5
Треугольник Паскаля как разновидность треугольника.....	6
Свойства треугольника Паскаля и их применение в решении задач	8
Треугольник Паскаля и теория вероятности.....	9
Практическая часть работы.....	11
Заключение	13
Список использованных источников и литературы	14

Введение

В этом учебном году мы начали изучать новый предмет «геометрия». Одна из глав курса геометрии называется «Треугольники». Нас очень заинтересовала данная тема. Мы всегда хотели узнать много нового о треугольниках, об их происхождении и значении в нашей жизни. Ведь мир треугольников очень загадочен и интересен.

Треугольник - первая геометрическая фигура, встречающаяся в древних орнаментах. Изучая литературу, мы узнали, что в Египте он символизировал триаду духовной воли, любви, интуиции и высшего разума человека, то есть его личность или душу.

Ацтеки использовали изображение треугольника с вершиной наверху, соединенного с перевернутым треугольником, в качестве символа временного цикла. Треугольник в сочетании с крестом образует алхимический знак Серы.

Равносторонний треугольник, символизирующий, по древнееврейской традиции, совершенство, у христиан означает Троицу - Отца, Сына и Святого Духа.

Существует множество видов треугольников, но больше всего нас заинтересовал треугольник Паскаля.

Проблема исследования:

Проблема нашего исследования состоит в том, что мы попытались выявить и показать то, насколько широко треугольники используются в практической жизни.

Практическая значимость исследования:

Данная исследовательская работа может быть использован как дополнительный материал к урокам геометрии, для внеклассной работы по математике.

Цель исследования:

- ознакомиться с треугольником Паскаля и его применением как разновидностью треугольников;

Гипотеза:

Если числа треугольника Паскаля обладают особыми свойствами, то его можно считать уникальным для решения различных задач

Задачи:

- определить применение свойств чисел треугольника Паскаля;
- изучить литературу по теме «Треугольник Паскаля»;
- выявить свойства чисел, входящих в состав треугольника Паскаля;
- сформулировать вывод и итоги исследования;

Объект исследования: треугольник как геометрическая фигура

Предмет исследования: свойства треугольника Паскаля

Методы исследования:

- аналитико-статистическая работа со справочной, научно-познавательной и специальной литературой;
- поиск информации в интернет - ресурсах.

Направления работы:

- выбор проблемы, источников литературы, составление плана;
- работа с литературой и другими источниками;
- обработка полученных данных;
- анализ результатов, формулирование вывода;
- мультимедийная подготовка.

Основные этапы исследования: подготовительный; деятельностный;

Ход исследования: рефлексивный; аналитический; презентационный.

Теоретическая часть работы

Знакомство с треугольником Паскаля

Наше первое знакомство с треугольником Паскаля произошло во время изучения темы «Возведение двучлена в степень» на уроке алгебры. Нам уже известны формулы квадрата суммы и квадрата разности, куба суммы и куба разности. Мы заметили, что получить формулы для возведения двучлена в четвёртую, пятую и т.д. степень возможно, учитывая некоторую закономерность в коэффициентах и степенях каждого слагаемого.

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Коэффициенты всех строк можно расположить в виде треугольника:

																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					</
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	----

Таким образом, мы познакомились с треугольником Паскаля и решили продолжить изучение арифметического треугольника.

Блез Паскаль – французский математик



Блез Паскаль (19 июня 1623, Клермон-Ферран, — 19 августа 1662, Париж) — французский математик, физик, литератор и философ.

Паскаль был первоклассным математиком. Он помог создать два крупных новых направления математических исследований. В возрасте шестнадцати лет написал замечательный трактат о предмете проективной геометрии и в 1654 году переписывался с Пьером де Ферма по теории вероятностей, что впоследствии оказало принципиальное влияние на

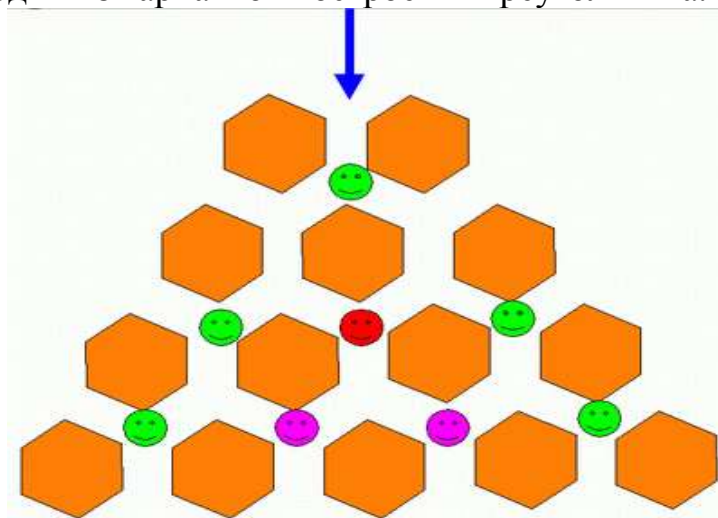
развитие современной экономики.

Треугольник Паскаля как разновидность треугольника

Изучая разновидности треугольников, мы выяснили, что треугольник Паскаля — арифметический треугольник, образованный биномиальными коэффициентами. Назван в честь Блеза Паскаля. В действительности, треугольник Паскаля был известен задолго до 1653 года - даты выхода "Трактата об арифметическом треугольнике". Так, этот треугольник воспроизведен на титульном листе учебника арифметики, написанном в начале XVI Петром Апианом, астрономом из Ингольштадтского университета. Изображен треугольник и на иллюстрации в книге одного китайского математика, выпущенной в 1303 году. Омар Хайям, бывший не только философом и поэтом, но и математиком, знал о существовании треугольника уже около 1100 года, в свою очередь, заимствовав его из более ранних китайских или индийских источников.

Ещё мы узнали из книги "Математические новеллы" (М., Мир, 1974) Мартина Гарднера, что "Треугольник Паскаля так прост, что выписать его сможет даже десятилетний ребенок. В то же время, он таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных схем во всей математике".

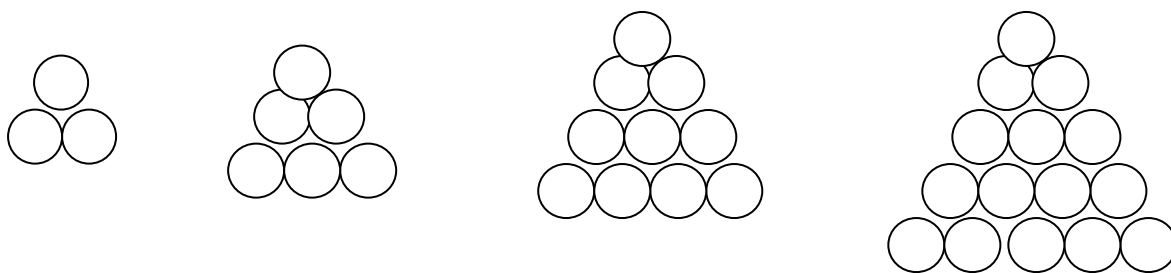
Мы рассмотрели схему построения треугольника, предложенную Гуго Штейнгаузом в его классическом «Математическом калейдоскопе»: предположим, что вы входите в город как показано на схеме синей стрелкой, и можете двигаться только вперед, точнее, все время выбирая, вперед налево, или вперед направо. Узлы, в которые можно попасть только единственным образом, отмечены зелеными смайликами, точка, в которую можно попасть двумя способами, показана красным смайликом, а тремя, соответственно - розовыми. Это один из вариантов построения треугольника.



(Рисунок 1)

Изучая специальную литературу, мы узнали, что еще проще объясняют устройство треугольника Паскаля слова: каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел.

Все элементарно, но сколько в этом таится чудес. Если очертить треугольник Паскаля, то получится равнобедренный треугольник. В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Треугольник можно продолжать неограниченно. Он обладает симметрией относительно вертикальной оси, проходящей через его вершину. Вдоль диагоналей (насколько у треугольника могут быть диагонали, но не будем придирааться, такая терминология встречается в публикациях), параллельных сторонам треугольника (на рисунке отмечены зелеными линиями) выстроены треугольные числа и их обобщения, на случай пространств всех размерностей. Треугольные числа в самом обычном и привычном нам виде, показывают, сколько касающихся кружков можно расположить в виде треугольника - как классический пример начальная расстановка шаров в бильярде. К одной монетке можно прислонить еще две - итого три - к двум можно приладить еще три - итого шесть.

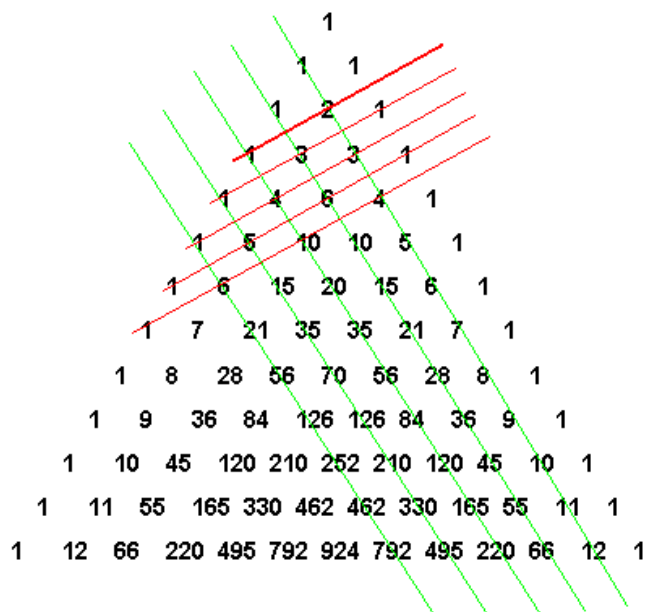


Получили треугольные числа на рисунке: 3; 6; 10; 15.

Продолжая наращивать ряды с сохранением формы треугольника, получим ряд 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66..., что и показывает вторая зеленая линия. Этот замечательный ряд, каждый член которого равен сумме натурального ряда чисел ($55=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$), содержит также множество знакомцев, хорошо известных любителям математики: 6 и 28 - совершенные числа, 36 - квадратное число, 8 и 21 - числа Фибоначчи.

Следующая зеленая линия покажет нам тетраэдральные числа - один шар мы можем положить на три - итого четыре, под три подложим шесть - итого десять, и так далее.

Чтобы найти сумму чисел, стоящих на любой диагонали от начала до интересующего нас места, достаточно взглянуть на число, расположенное снизу и слева от последнего слагаемого, (слева для правой диагонали, для левой диагонали будет справа, а вообще - ближе к середине треугольника). Пусть, например, мы хотим вычислить сумму чисел натурального ряда от 1 до 9. "Спустившись" по диагонали до числа 9, мы увидим слева снизу от него число 45. Оно то и дает искомую сумму. Чему равна сумма первых восьми треугольных чисел? Отыскиваем восьмое число на второй диагонали и сдвигаемся вниз и влево. Ответ: 120.



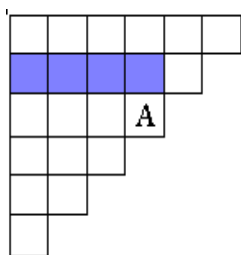
(Рисунок 2)

Треугольник Паскаля имеет применение в теории вероятностей и обладает замечательными свойствами.

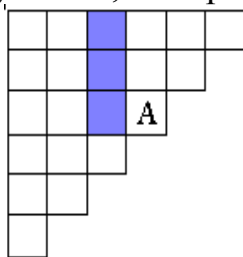
Свойства треугольника Паскаля и их применение в решении задач

Паскаль подробно исследовал свойства и применения своего "треугольника". Приведем для примера лишь 3 свойства "треугольника", найденные самим Паскалем; при этом, будем исходить из того расположения "треугольника" на плоскости, какое было указано Паскалем, и говорить о горизонтальных и вертикальных рядах.

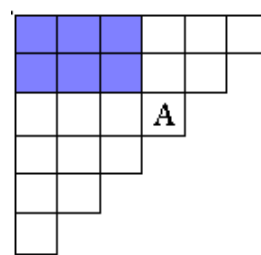
Свойство 1: Каждое число A в таблице равно сумме чисел предшествующего горизонтального ряда, начиная с самого левого вплоть до стоящего непосредственно над числом A (в котором клетки, содержащие слагаемые, дающие в сумме A , заштрихованы). (Рисунок 4)



(Рисунок 4)



(Рисунок 5)



(Рисунок 6)

Свойство 2: Каждое число A в таблице равно сумме чисел предшествующего вертикального ряда, начиная с самого верхнего вплоть до стоящего непосредственно левее числа A . (Рисунок 5)

Свойство 3: Каждое число в таблице, будучи уменьшенным на единицу, равно сумме всех чисел, заполняющих прямоугольник, ограниченный теми вертикальными и горизонтальными рядами, на

пересечении которых стоит число A (сами эти ряды в рассматриваемый прямоугольник не включаются). (Рисунок 6)

Треугольник Паскаля и теория вероятности.

Блез Паскаль и другой великий француз, Пьер Ферма, стали основателями теории вероятностей, когда Паскаль и Ферма независимо друг от друга дали правильное объяснение так называемого парадокса раздела ставки. Два игрока играют в "безобидную" игру (т.е. шансы победить у обоих одинаковы), договорившись, что тот, кто первым выигрывает шесть партий, получит весь приз. Предположим, что игра остановилась до того, как один из них выиграл приз (например, первый игрок выиграл пять партий, а второй - три). Как справедливо разделить приз? Так, согласно одному решению следовало разделить приз в отношении $5 : 3$, т.е. пропорционально выигранным партиям, согласно другому - в отношении $2 : 1$ (здесь рассуждения велись, по всей видимости, следующим образом: поскольку первый игрок выиграл на две партии больше, что составляет третью часть от необходимых для победы шести партий, то он должен получить одну треть от приза, а оставшуюся часть нужно разделить пополам).

А между тем делить надо в отношении $7:1$. И Паскаль, и Ферма рассматривали парадокс раздела ставки как задачу о вероятностях, установив, что справедливым является раздел, пропорциональный шансам первого игрока выиграть приз. Предположим, первому игроку осталось выиграть только одну партию, а второму для победы необходимо выиграть еще три партии, причем игроки продолжают игру и играют все три партии, даже если некоторые из них окажутся лишними для определения победителя. Для такого продолжения все $2^3 = 8$ возможных исходов будут равновероятными. Так как второй игрок получает приз только при одном исходе (если он выиграл все три партии), а в остальных случаях побеждает первый игрок, справедливым является отношение $7 : 1$.

В науке и практике часто встречаются задачи, решая которые приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и подсчитывать число комбинаций. Такие задачи получили название комбинаторных задач.

Рассмотрим основные формулы комбинаторики:

1) Размещение $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Это любое упорядоченное подмножество из k элементов множества n .

2) Перестановки (P_n). Если $k = n$, то эти размещения называются перестановками.

$$P_n = n!$$

3) Сочетания (C_n^k) – это любое подмножество из k – элементов, которые принадлежат множеству, состоящему из n – различных элементов.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

В треугольнике Паскаля число, показывающее, сколькими способами можно выбрать k элементов из множества, содержащего n различных элементов, стоит на пересечении k -ой диагонали и n -ой строки. Чтобы вычислить сочетание C_7^3 , найдем диагональ седьмую сверху и отсчитываем три числа по горизонтали. Получу число 35.

Можно использовать треугольник Паскаля и для вычисления размещений. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = C_n^k \cdot k!$. Если нам нужно посчитать A_7^3 , то зная что $C_7^3 = 35$, а $3!=6$, получим значение данного размещения 210.

Мы пришли к выводу, что рассмотренные свойства треугольника Паскаля подтверждают слова Мартина Гарднера о том, что треугольник Паскаля одна из наиболее изящных схем во всей математике.

Актуальность исследования обусловлена ежегодным усложнением заданий ЕГЭ, что требует углубленных знаний не только в алгебре, но и в геометрии.

Практическая часть работы

В нашей практической работе мы подобрали ряд задач по теме «Треугольник Паскаля»

Задача 1. В магазине «Филателия» продается 8 различных наборов марок, посвященных спортивной тематике. Сколькими способами можно выбрать из них 3 набора?

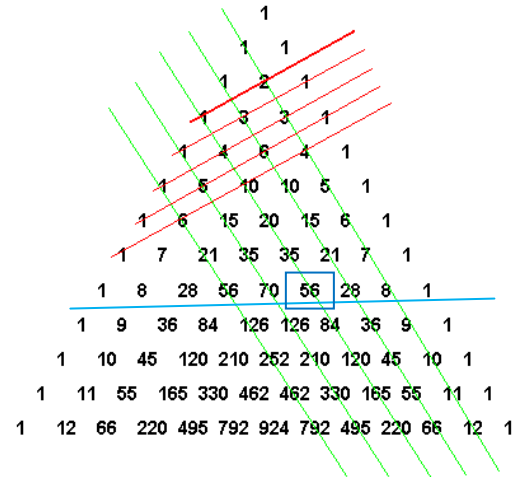
Решение:

$$C_8^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56 \text{ способов}$$

В треугольнике Паскаля число, показывающее, сколькими способами можно выбрать k элементов из множества, содержащего n различных элементов, стоит на пересечении k -ой диагонали и n -ой строки.

Найдем диагональ восьмую сверху и отсчитываем три числа по горизонтали.

Получим число 56.



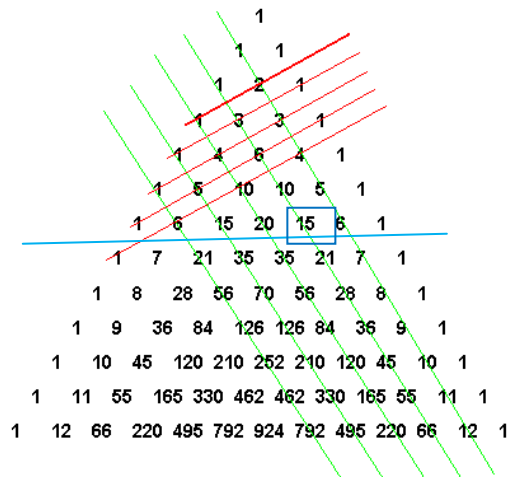
(Рисунок 8)

Задача 2. Из шести врачей поликлиники двух необходимо отправить на курсы повышения квалификации. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

$$C_6^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15 \text{ способов}$$

Найдем диагональ шестую сверху и отсчитываем два числа по горизонтали. Получим число 15.



(Рисунок 9)

Задача 3. В пачке находятся одинаковые по размеру 7 тетрадей в линейку и 5 в клетку. Из пачки наугад берут 3 тетради. Какова вероятность того, что все три тетради окажутся в клетку?

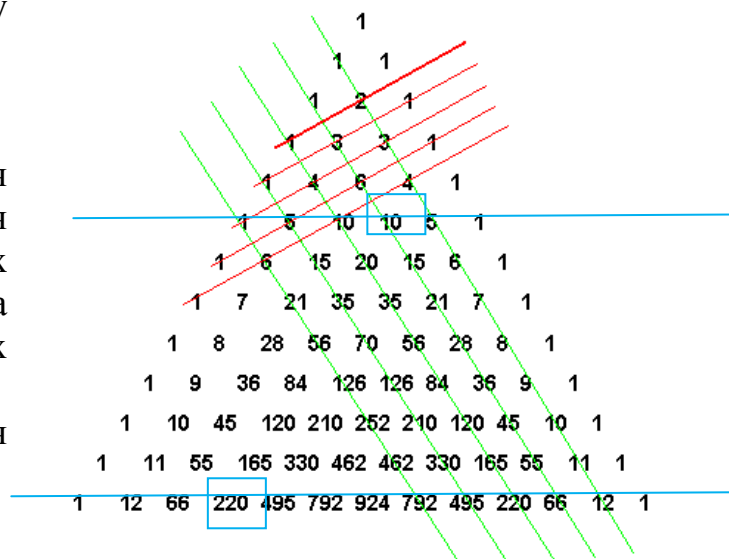
Решение. Сначала найдём общее число возможных исходов, т.е. сколькими способами мы можем выбрать 3 тетради из 12 тетрадей

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220.$$

$$C_5^3 = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10 \text{ способов}$$

По формуле нахождения вероятности получим

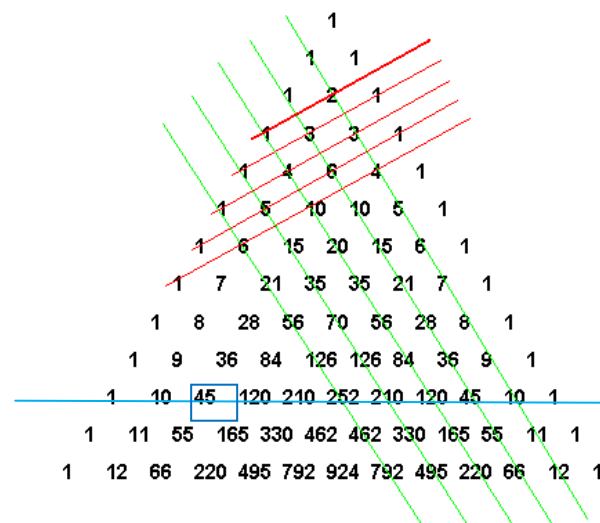
$$P = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$$



Задача4. На плоскости даны 10 прямых, причём среди них нет параллельных и через каждую точку их пересечения проходят ровно две прямые. Сколько у них точек пересечения?

Задача 5. В сумке 10 мячей, пронумерованных от 1 до 10. Наугад вынимают 2 мяча. Какова вероятность того, что это будут мячи с номерами 7 и 3?

Вынуть 2 мяча из 10
имеющихся можно 45 способами.
Вероятность нашего события 2 из
45.



В ходе проведения практического исследования мы пришли к следующим выводам: при решении комбинаторных задач и задач по теории вероятностей можно пользоваться не только формулами комбинаторики, но и использовать свойства треугольника Паскаля

Заключение

Работа по выбранной теме осуществлялась в полном соответствии с планом исследования, а именно: объект и предмет исследования, поставлены цели и задачи, а также определены ожидаемые результаты. Были указаны используемые методы исследования, определена проблема.

В данной работе была дана общая характеристика треугольника как геометрической фигуры, был детально рассмотрен треугольник Паскаля, его свойства.

Мы пришли к выводу, что одной из наиболее известных и изящных численных схем во всей математике является треугольник Паскаля. Треугольник Паскаля - понятие значительно шире, чем нам представлялось. Он обладает не только удивительными свойствами, но и применялся в архитектуре средних веков для построения схем пропорциональности и для построения прямых углов землемерами и архитекторами. Используя треугольник Паскаля, можно решить задачи из теории вероятности и комбинаторики. С комбинаторными задачами мы встречались на уроках математики в 6 классе и при решении олимпиадных задач.

Практическая значимость данной работы заключается в следующем: мы, изучив много литературы по данному вопросу, получили дополнительные знания в области математики, укрепили свой интерес к этой науке.

Мы узнали, что треугольник Паскаля применяется:

- ❖ В курсе алгебры
- ❖ При решении комбинаторных задач
- ❖ Для решения различных задач в области физики
- ❖ С появлением вычислительных машин построение треугольника Паскаля стало излюбленной задачей для начинающих при изучении основ программирования.

Работа по данной теме оказалась интересной и полезной.

Список использованных источников и литературы

1. Абачиев С. К., Радужная фрактальность треугольника Паскаля / С. К. Абачиев, -- Минск, 1999.—168с.
2. Галкин Е.В. Нестандартные задачи по математике. Задачи логического характера. Книга для учащихся 5-11кл.Москва, «Просвещение», 1996г. – 194 с.
3. Мартин Гарднер. Глава 17. Неисчерпаемое очарование треугольника Паскаля / Математические новеллы. — Минск: Мир, 1974.— 456 с.
4. Треугольник Паскаля. В. А. Успенский. - 2 - е изд. – Москва: Наука, 1979. – 48с.
5. Фукс Д., Фукс М., Арифметика биномиальных коэффициентов / Квант. — 1970. — № 6. — С.17-25.
6. Энциклопедия для детей. Т 11. Математика / Глав. ред. М. Аксенова; метод. и отв. ред. В. Володин. – М.: Аванта+,2004. – 688с.
7. <http://ru.wikipedia.org/wiki/>
8. <http://davaiknam.ru/text/volshebniy-treugolenik>.